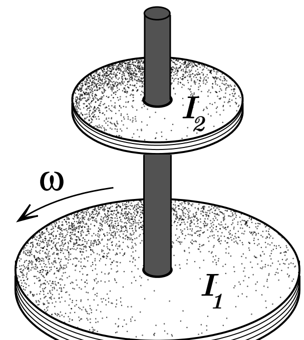
UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

FS1112 • 2^{do} Parcial I (**50/3**)
Martes, 12 de Agosto de 2014

Nombre ______________________________ Carnet ______________________

Las siguientes **dos** *preguntas se refieren al sistema representado en la figura:*

Un disco cuyo momento de inercia es $\boldsymbol{I_1}$ rota alrededor de su eje con velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ y energía cinética $\boldsymbol{K}$. Sobre éste, se posa otro disco cuyo momento de inercia es $\boldsymbol{I_2 = I_1/4}$, inicialmente en reposo rotacional. Cuando ambos discos estén rotando acoplados:



1. [**5** ***pts.***] La velocidad angular $\boldsymbol{\omega'}$ del sistema será:

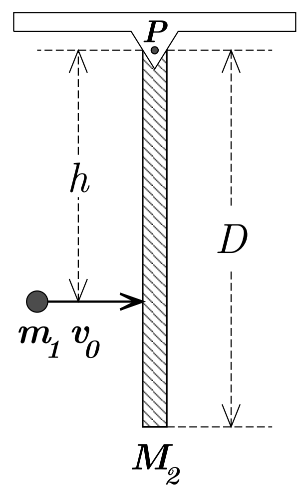
(★) $\omega' = (4/5)\,\omega$	( ) $\omega' = (1/5)\,\omega$	( ) $\omega' = (5/4)\,\omega$
( ) $\omega' = (4/3)\,\omega$	( ) $\omega' = (3/4)\,\omega$	

2. [**5** ***pts.***] La variación en la energía cinética del sistema será:

( ) $\Delta K = +(1/5)\,K$	( ) $\Delta K = -(4/5)\,K$	( ) $\Delta K = +(1/4)\,K$
(★) $\Delta K = -(1/5)\,K$	( ) $\Delta K = -(1/4)\,K$	

Las siguientes **tres** *preguntas se refieren al sistema representado en la figura:*

Una barra delgada, de longitud $\boldsymbol{D}$ y masa $\boldsymbol{M_2}$, cuelga en reposo del techo, sostenida por un eje fijo sin fricción que pasa por el punto $\boldsymbol{P}$. Contra la barra choca una bolita de plastilina, de masa $\boldsymbol{m_1}$, incidiendo a lo largo de la línea horizontal localizada a una distancia $\boldsymbol{h}$ por debajo del punto $\boldsymbol{P}$. Luego del choque, la bolita queda pegada a la barra.



3. [**5** ***pts.***] El momentum angular total L_{TOT} respecto al punto P, antes del choque, es:

( ) $L_{TOT} = 2\,m_1\,v_0\,h$	( ) $L_{TOT} = -2\,m_1\,v_0\,h$	(★) $L_{TOT} = m_1\,v_0\,h$
( ) $L_{TOT} = -\,m_1\,v_0\,h$	( ) $L_{TOT} = 0$	

4. [**5** ***pts.***] El momentum angular total L'_{TOT} respecto al punto P, después del choque, es:

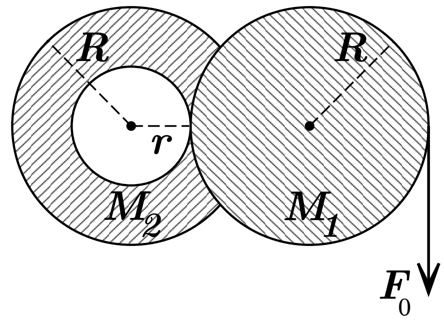
   ( ) Distinto a L_{TOT} porque la bolita queda pegada
   (★) Igual que L_{TOT} porque las fuerzas externas no ejercen torque
   ( ) Distinto a L_{TOT} porque la bolita ejerce torque sobre la barra
   ( ) Igual a cero porque la barra está en reposo antes del choque
   ( ) No se puede calcular porque la fuerza que ejerce el soporte se desconoce

5. [**5** ***pts.***] La velocidad angular de la barra, después del choque, es:

( ) $\omega' = v_0/h$	( ) $\omega' = (m_1v_0h)/\left(m_1h^2 + M_2D^2\right)$	(★) $\omega' = (3m_1v_0h)/\left(3m_1h^2 + M_2D^2\right)$
( ) $\omega' = (m_1v_0h)/\left(M_2D^2\right)$	( ) $\omega' = (3m_1v_0h)/\left(M_2D^2\right)$	

Las siguientes **tres** *preguntas se refieren al sistema representado en la figura:*

Dos piezas de micro–engranaje en forma de disco, de radios $\boldsymbol{R}$ y masas $\boldsymbol{M_1}$ y $\boldsymbol{M_2 = 3M_1}$ respectivamente, están acopladas entre sí por un piñón coaxial de masa despreciable y radio $\boldsymbol{r = R/2}$. Una fuerza externa $\boldsymbol{F_0}$ actúa tangencialmente sobre el disco que no tiene piñón (ver figura). Los ejes de las poleas están fijos.



6. [**5** ***pts.***] La relación entre las aceleraciones angulares de ambas piezas es:

( ) $\alpha_2 = -\,\alpha_1/3$	( ) $\alpha_2 = -\alpha_1/2$	( ) $\alpha_2 = -2\,\alpha_1/3$
( ) $\alpha_2 = -3\,\alpha_1$	(★) $\alpha_2 = -2\,\alpha_1$	

7. $\boxed{\text{[5 }\cancel{\textit{pts.}}\text{]}}$ La magnitud $\boldsymbol{f}$ de la fuerza tangencial entre los discos es:

( ) $f = (4/7)\,F_0$	( ) $f = (6/7)\,F_0$	( ) $f = (2/7)\,F_0$
( ) $f = (3/7)\,F_0$	( ) $f = (5/7)\,F_0$	(★) $f = \dfrac{12}{13}\,F_0$

8. $\boxed{\text{[5 }\cancel{\textit{pts.}}\text{]}}$ La aceleración angular $\boldsymbol{\alpha_2}$ del disco de la izquierda es:

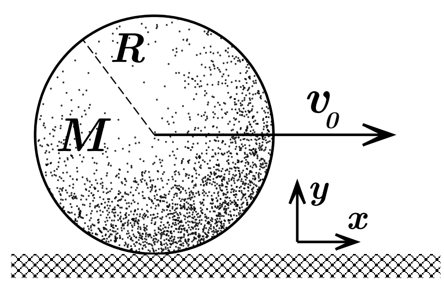
( ) $\alpha_2 = (2/7)(F_0/M_2R)$	( ) $\alpha_2 = (5/7)(F_0/M_2R)$	( ) $\alpha_2 = (3/7)(F_0/M_1R)$
( ) $\alpha_2 = (4/7)(F_0/M_1R)$	( ) $\alpha_2 = (2/7)(F_0/M_1R)$	(★) $\alpha_2 = \dfrac{4}{13}\left(\dfrac{F_0}{M_1R}\right)$

Las siguientes **dos** *preguntas se refieren al sistema representado en la figura:*

Una bola maciza, de masa $\boldsymbol{M}$, radio $\boldsymbol{R}$ y momento de inercia $\boldsymbol{I = (2/5)\,MR^2}$, es lanzada en contacto con una superficie rugosa horizontal. En el instante inicial ($t = 0$), la bola no gira y tiene velocidad $\boldsymbol{v_0}$. Los ejes $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ se indican en la figura. El coeficiente cinético de fricción es $\boldsymbol{\mu_k}$.

9. [**5** ***pts.***] La aceleración $\boldsymbol{a_x}$ del centro de masas y la aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$ de la bola son, respectivamente:

( ) $a_x = -g$ $\alpha = -(g/R)$	(★) $a_x = -\mu_k g$ $\alpha = -(5/2)\,\mu_k\,(g/R)$
( ) $a_x = g$ $\alpha = (g/R)$	( ) $a_x = -\mu_k g$ $\alpha = -(2/5)\,\mu_k\,(g/R)$
( ) $a_x = \mu_k g$ $\alpha = (5/2)\,\mu_k\,(g/R)$	



10. $\boxed{\text{[5 }\cancel{\textit{pts.}}\text{]}}$ Si la velocidad inicial es $\boldsymbol{v_0 = 20\,[m/s]}$ y el coeficiente cinético de fricción es $\boldsymbol{\mu_k = 7/8}$, el instante $\boldsymbol{t_R}$ en que la bola comienza a rodar sin deslizar es aproximadamente:

( ) $t_R = 0.5\,[s]$	( ) $t_R = 0.75\,[s]$	( ) $t_R = 1.5\,[s]$
( ) $t_R = 2.5\,[s]$	( ) $t_R = 0.25\,[s]$	(★) $t_R = \dfrac{2v_0}{7\mu_k g} = \dfrac{32}{49}\,[s]$

UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR

DEPARTAMENTO DE FÍSICA

FS1112 • 2^{do} Parcial II (**50/3**)

Miércoles, 13 de Agosto de 2014

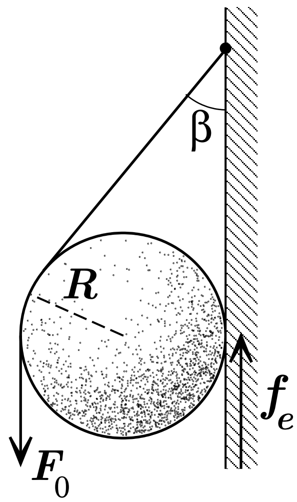
Nombre ______________________ Carnet ______________

Las siguientes **cinco** *preguntas se refieren al sistema representado en la figura:*

Una bola de masa $\boldsymbol{M}$ y radio $\boldsymbol{R}$ está en contacto con una pared vertical, suspendida por una cuerda tensa tangencial a ella, anclada a la pared. En el punto de anclaje, la cuerda forma un ángulo $\boldsymbol{\beta}$ con la pared, tal que $\boxed{\mathbf{cos}\,(\boldsymbol{\beta}) = \mathbf{4/5}.}$ En el punto diametralmente opuesto al punto de contacto, se aplica tangencialmente una fuerza conocida sobre la bola, $\boldsymbol{F_0}$, como se indica en la figura.

El coeficiente de estático de fricción entre la bola y la pared es $\boxed{\boldsymbol{\mu_e} = \mathbf{2/3}.}$

Sean $\boldsymbol{T}$ la magnitud de la tensión que ejerce la cuerda, y $\boldsymbol{N}$ y $\boldsymbol{f_e}$ las de las fuerzas de contacto, respectivamente normal y tangencial, ejercidas por la pared sobre la bola.



11. [**5** ***pts.***] La relación entre las magnitudes de la fuerza normal N y la tensión T es:

( ) $T = N\,\cos\beta$	( ) $T = N\,\mathrm{sen}\,\beta$	( ) $N = T\,\cos\beta$
( ) $T = N$	(★) $N = T\,\mathrm{sen}\,\beta$	

12. [**5** ***pts.***] De la ecuación de equilibrio rotacional, respecto al centro de masas, se obtiene:

( ) $T + f_e = F_0$	( ) $T + f_e = F_0 + Mg$	(★) $T - f_e = F_0$
( ) $T - f_e = F_0 + Mg$	( ) $T - f_e = Mg$	

13. [**5** ***pts.***] La tensión de la cuerda, en función de las fuerzas conocidas F_0 y Mg, es:

(★) $T = (5/9)\,(2F_0 + Mg)$	( ) $T = F_0 + Mg$	( ) $T = (9/5)\,(F_0 + Mg)$
( ) $T = (10/9)\,F_0$	( ) $T = (5/9)\,Mg$	

14. [**5** ***pts.***] La magnitud de la fuerza de fricción es:

( ) $f_e = (1/4)\,(F_0 + Mg)$	( ) $f_e = Mg - F_0$	(★) $f_e = (1/9)\,(F_0 + 5Mg)$
( ) $f_e = F_0$	( ) $f_e = Mg$	

15. [**5** ***pts.***] Si se elimina la fuerza F_0 es imposible el equilibrio estático de la bola. La magnitud mínima que debe tener F_0 es:

( ) $F_0 \geqslant (1/3)\,Mg$	( ) $F_0 \geqslant (4/3)\,Mg$	( ) $F_0 \geqslant (1/4)\,Mg$
( ) $F_0 \geqslant 4\,Mg$	(★) $F_0 \geqslant Mg$	

16. **[5 *pts.*]** Un proyectil es disparado verticalmente hacia arriba desde La Tierra, con una rapidez igual a la mitad de su rapidez de escape. Si el radio de La Tierra es $\boldsymbol{R}$, y suponemos nula la resistencia del aire, la máxima altura $\boldsymbol{h}$ que alcanza el proyectil, medida desde la superficie terrestre, es:

( ) $h = 4R$	( ) $h = R$	(★) $h = R/3$
( ) $h = R/4$	( ) $h = 3R$	

17. **[5 *pts.*]** Un satélite gira alrededor de La Tierra en una órbita circular, con energía potencial U y energía cinética K. Se supone que la energía potencial es cero en el infinito. La relación entre la energía cinética y la potencial es:

( ) $K = -U$	( ) $2K = U$	( ) $K = 2U$
(★) $2K = -U$	( ) $K = -2U$	

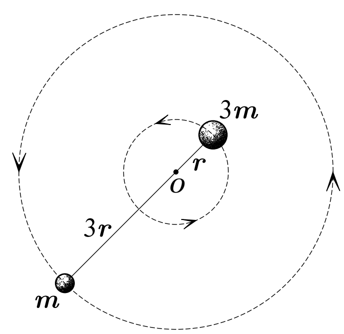
18. **[5 *pts.*]** Un planeta está en órbita circular alrededor del Sol. Su distancia al Sol es cuatro veces la distancia de La Tierra al Sol. Si $T_0 = 1$ año terrestre, el período T de tal planeta es:

(★) $T = 8T_0$	( ) $T = 32T_0$	( ) $T = 2T_0$
( ) $T = 16T_0$	( ) $T = 4T_0$	

Las siguientes **dos** *preguntas se refieren al sistema representado en la figura:*

Un sistema binario consta de dos estrellas, una de masa $\boldsymbol{m}$ y la otra de masa $\boldsymbol{3m}$, separadas entre sí una distancia $\boldsymbol{4r}$. Ambas describen órbitas circulares alrededor del centro de masas (punto O en la figura).

Las únicas fuerzas que actúan son las respectivas fuerzas de interacción gravitatoria entre ambas.



19. **[5 *pts.*]** La fuerza centrípeta que actúa sobre la estrella más grande tiene magnitud:

( ) $F = \dfrac{3Gm^2}{r^2}$	(★) $F = \dfrac{3Gm^2}{16r^2}$	( ) $F = \dfrac{Gm^2}{r^2}$
( ) $F = \dfrac{3Gm^2}{4r^2}$	( ) $F = \dfrac{Gm^2}{3r^2}$	

20. **[5 *pts.*]** La velocidad angular de ambas estrellas es:

(★) $\omega = \left(\dfrac{Gm}{16\,r^3}\right)^{1/2}$	( ) $\omega = \left(\dfrac{Gm}{9\,r^3}\right)^{1/2}$	( ) $\omega = \left(\dfrac{Gm}{r^3}\right)^{1/2}$
( ) $\omega = \left(\dfrac{Gm}{4\,r^3}\right)^{1/2}$	( ) $\omega = \left(\dfrac{Gm}{27\,r^3}\right)^{1/2}$	

RESPUESTAS DETALLADAS

1-2: Al entrar en contacto ambos discos, sólo entren en juego fuerzas de interacción entre ellos, es decir, *pares acción–reacción*, que no ejercen torque neto sobre el sistema. Entonces el momentum angular total del sistema, respecto al eje, se conserva:

1. $L = I_1\omega = (I_1 + I_2)\,\omega' = L'$. Siendo $I_2 = I_1/4$, queda: $\omega' = \dfrac{I_1}{I_1 + I_2}\,\omega = \dfrac{4}{5}\,\omega \implies \boxed{\omega' = \dfrac{4}{5}\,\omega}$

2. $K' = \dfrac{1}{2}\,(I_1 + I_2)\,\omega'^2 = \dfrac{1}{2}\,(I_1 + I_2)\left(\dfrac{I_1}{I_1 + I_2}\,\omega\right)^2 = \dfrac{I_1}{I_1 + I_2}\,\left(\dfrac{1}{2}\,I_1\,\omega^2\right) = \dfrac{4}{5}\,K \implies \boxed{\Delta K = K' - K = -\dfrac{1}{5}\,K}$

3-5: El choque es inelástico porque la bolita queda pegada a la barra y se tienen, actuando en el instante del choque, la gravedad y la fuerza del soporte, que no ejercen torque respecto a P. Luego no se conservan ni la energía cinética ni el momentum lineal del sistema, pero el momentum angular sí.

3. El momentum angular inicial es el de la bolita solamente, pues la barra está en reposo $\implies \boxed{L_{TOT} = m_1\,v_0\,h}$

4. Como ya se explicó arriba, después del choque, $\boxed{L'_{TOT} = L_{TOT}}$

5. Justo después del choque, $L'_{TOT} = (m_1\,h^2 + I_P)\,\omega = m_1 v_0 h = L_{TOT}$, donde $I_P = M_2 D^2/3$ es el momento de inercia de la barra con respecto al punto P en su extremo. Luego $\boxed{\omega = \dfrac{m_1 v_0 h}{m_1 h^2 + I_P} = \dfrac{3 m_1 v_0 h}{3 m_1 h^2 + M_2 D^2}}$

6-8: En el punto de contacto entre el disco de la derecha y el piñón del disco de la izquierda, hay una fuerza tangencial $\boldsymbol{f}$ que transmite el movimiento de la una a la otra. La misma apunta hacia arriba para el disco de la izquierda y hacia abajo para el de la derecha. Las ecuaciones de movimiento son <u>rotacionales</u> solamente, porque los ejes están fijos.

6. Debido al acoplamiento, las velocidades en los respectivos bordes son iguales, $r\,\omega_2 = -R\,\omega_1$, de donde $\boxed{\alpha_2 = -2\,\alpha_1}$

7. Las ecuaciones de movimiento son $\tau_1 = R(f - F_0) = I_1\alpha_1$ y $\tau_2 = r f = I_2\alpha_2$, con los respectivos momentos de inercia $I_1 = M_1R^2/2$ e $I_2 = M_2R^2/2 = 3I_1$. Usando $r = R/2$ y $\alpha_2 = -2\alpha_1$, se tiene:

$$\left\{\begin{array}{rcccl} 2R(f - F_0) & = & 2\,I_1\,\alpha_1 & = & -I_1\,\alpha_2 \quad (i) \\ Rf & = & 2\,I_2\,\alpha_2 & = & 6\,I_1\,\alpha_2 \quad (ii) \end{array}\right. \underset{[\,6(i)+(ii)\,]\div R}{\implies} 13f = 12F_0 \implies \boxed{f = \frac{12}{13}\,F_0}$$

8. La ecuación (ii) se puede reescribir de la forma $f = 3M_1R\,\alpha_2$, con lo que se obtiene $\boxed{\alpha_2 = \dfrac{4}{13}\left(\dfrac{F_0}{M_1R}\right)}$

9-10: Al tener velocidad v_0 y no estar girando, la bola desliza respecto a la superficie rugosa, experimentando una fuerza de roce cinética ($|f_k| = \mu_k|N|$) en dirección contraria, hasta que se alcanza la condición de rodadura $v_x = -\omega R$. A partir de ese instante (t_R), continúa a velocidad constante ya que la fuerza de roce estática, si la hubiere, no hace trabajo.

9. Las ecuaciones de movimiento para la bola son:

$$M a_x = -|f_k| = -\mu_k M g \quad \text{(traslacional)} \implies \boxed{a_x = -\mu_k g}$$

$$I_{CM}\,\alpha = -|f_k| R = -\mu_k M g \quad \text{(rotacional)}, \quad \text{donde} \quad I_{CM} = \frac{2}{5}\,MR^2 \implies \boxed{\alpha = -\frac{5}{2}\,\mu_k\left(\frac{g}{R}\right)}$$

10. Integrando las ecuaciones de movimiento respecto al tiempo, usando las condiciones iniciales, se obtienen la velocidad del centro de masas $v_x = v_0 - \mu_k g t$ y la velocidad angular $\omega = -(5\mu_k g)/2R)\,t$. En el instante $t = t_R$, se comienza a cumplir la condición de rodadura $v_x = -\omega R$, de donde $v_0 = (7\mu_k g/2)\,t_R \implies \boxed{t_R = \dfrac{2v_0}{7\mu_k g} = \dfrac{32}{49}\,[s]}$

11-15: La bola se mantiene en equilibrio, producto de tres fuerzas que contrarrestan a la de gravedad. Una de ellas, la tensión de la cuerda $\vec{\boldsymbol{T}}$, es tangencial a la bola y tiene una componente horizontal que a su vez es compensada con la fuerza normal de contacto, $\vec{\boldsymbol{N}}$.

11. Las ecuaciones de equilibrio estático traslacional para la bola son $\boxed{T\cos\beta + f_e = Mg + F_0}$ en dirección vertical, y $T\operatorname{sen}\beta - N = 0$ en dirección horizontal, por lo tanto $\boxed{N = T\operatorname{sen}\beta}$

12. Tomando el centro de masas como sistema de referencia para el cálculo de torques, la ecuación de equilibrio rotacional para la bola queda $R(F_0 - T + f_e) = 0$, de donde $\boxed{T - f_e = F_0}$

13. Usando el dato $\cos\beta = 4/5 \Rightarrow \operatorname{sen}\beta = 3/5$ y las ecuaciones de equilibrio correspondientes, se tiene un sistema de dos ecuaciones con las incógnitas $\boldsymbol{T}$ y $\boldsymbol{f_e}$. Resolviendo se obtiene, para la tensión: $\boxed{T = \frac{5}{9}\,(2F_0 + Mg)}$

14. Para la fricción, se obtiene: $\boxed{f_e = \frac{1}{9}\,(F_0 + 5Mg)}$

15. La fuerza normal de contacto, a su vez tiene magnitud $N = \frac{3}{5}T = \frac{1}{3}\,(F_0 + 5Mg)$. Resolviendo la inecuación $f_e \leqslant \mu_e N$, con $\mu = 2/3$, se obtiene $\boxed{F_0 \geqslant Mg}$

---

16. La rapidez v_e de escape del proyectil, desde la superficie terrestre está dada por la ecuación $K_e + U(R) = 0$, siendo $K_e = mv_e^2/2$ y $U(R) = -GMm/R$, donde M es la masa de La Tierra y R su radio. Luego $v_e^2 = 2GM/R$ y, sabiendo que el proyectil se lanza a la mitad de esta rapidez, se tiene $v^2 = (v_e/2)^2 = GM/2R$. Usando de nuevo el principio de conservación de la energía mecánica:
$$\frac{1}{2}\cancel{m}\left(\frac{GM}{2R}\right) - \frac{GM\cancel{m}}{R} = -\frac{GM\cancel{m}}{R+h} \quad\Longrightarrow\quad \frac{3}{4}\left(\frac{\cancel{GM}}{R}\right) = \frac{\cancel{GM}}{R+h} \quad\Longrightarrow\quad \boxed{h = \frac{1}{3}\,R}$$

17. Suponiendo que la masa del satélite sea despreciable respecto a la de La Tierra, ésta se encontrará en el centro de atracción de la órbita circular del mismo. Si el radio de la órbita circular es R_0, se tendrá que la fuerza gravitacional es igual a la centrípeta: $F_g = GMm/R_0^{\cancel{2}} = mv^2/\cancel{R_0} = 2K/\cancel{R_0}$. Siendo $GMm/R_0 = -U$, se tiene $\boxed{2K = -U}$

18. Debido a la tercera Ley de Kepler $T^2 \sim R^3$. Siendo $R = 4R_0$, donde R_0 es el radio de la órbita terrestre, se tiene $(T/T_0)^2 = (4R_0)^3/R_0^3 = 4^3 = 64$, de donde $\boxed{T = 8T_0}$

19-20: La fuerza entre ambas estrellas es gravitacional solamente. La misma es la fuerza centrípeta para ambos movimientos circulares.

19. Dado que la distancia entre estrellas es $4r$, la magnitud de la fuerza de atracción es $F = \dfrac{G(3m)m}{(4r)^2}$, es decir $\boxed{F = \dfrac{3Gm^2}{16r^2}}$

20. La misma fuerza centrípeta para ambos movimientos circulares alrededor del centro de masas da como resultado $F = \dfrac{\cancel{3}Gm^{\cancel{2}}}{16r^2} = \cancel{m}(\cancel{3}r)\omega^2 = (\cancel{3m})r\omega^2$, de donde $\boxed{\omega = \left(\dfrac{Gm}{16\,r^3}\right)^{1/2}}$